M5 Die Teilbarkeitsregeln	1

Eine Zahl ist nur dann ohne Rest teilbar

- durch 2, wenn ihre Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
- durch 5, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 ist.
- durch 10, wenn ihre Einerziffer 0 ist.
- durch 4, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
- durch 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- durch 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

M5 Die Teilbarkeitsregeln	1

Beispiele:

438 ist durch 2 teilbar, da an der Einerstelle die 8 steht.

438 ist durch 3 teilbar, da die Quersumme 4 + 3 + 8 = 15 durch 3 teilbar ist.

438 ist nicht durch 4 teilbar, da 38 nicht durch 4 teilbar ist.

438 ist nicht durch 5 teilbar, da an der Einerstelle keine 0 oder eine 5 steht.

438 ist nicht durch 9 teilbar, da die Quersumme nicht durch 9 teilbar ist.

M5 Zahlenmengen	2

Zahlen mit gemeinsamen Eigenschaften werden oft zu **Zahlenmengen** zusammengefasst.

z.B. V(2) = **Menge der Vielfachen von 2** = {2; 4; 6; 8; 10; …}

T(16) = **Menge der Teiler von 16** = {1; 2; 4; 8; 16}

IN = **Menge der natürlichen Zahlen** = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; …}

IN_0 = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; …}

Menge der Quadratzahlen = {1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; …}

Menge der Primzahlen = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; …}

Eine **Quadratzahl** entsteht, wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert.

Eine **Primzahl** ist eine Zahl, die nur durch sich selbst und 1 teilbar ist. 1 ist keine Primzahl.

Zahlen, die zu einer Menge gehören, nennt man **Elemente** dieser Menge. Man schreibt z.B.:

$100 \in V(2)$ aber $9 \notin T(20)$

M5 Zahlenmengen	2

Beispiele:

V(7) = {7; 14; 21; 28; 35; 42; 49; …}

T(24) = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24}

$77 \in V(7)$ $12345 \notin V(4)$ $3 \in T(36)$

M5 Das Runden	3

Rundungsregel:

1) Suche die Stelle, auf die gerundet werden soll (**Rundungsstelle**).
2) Betrachte die Ziffer rechts davon: bei 0, 1, 2, 3 oder 4 wird abgerundet,
   bei 5, 6, 7, 8 oder 9 wird aufgerundet.

M5 Das Runden	3

Beispiele:

Runde auf die Klammern angegebene Stelle/ Einheit:

7309 (T) $\approx$ 7000

45999 (HT) $\approx$ 0

35kg99g (kg) $\approx$ 35kg

35089m (km) $\approx$ 35km

M5 Der Betrag einer ganzen Zahl	4

Der Abstand einer Zahl a von der Zahl 0 heißt **Betrag von a** (kurz **|a|**).

Für jede ganze Zahl a gilt: $|a| \geq 0$

Zahl und Gegenzahl haben immer denselben Betrag.

M5 Der Betrag einer ganzen Zahl	4

Beispiele:

$|-5| = 5$

$|345| = 345$

$|0| = 0$

17 und -17 sind Gegenzahlen.

M5 Terme I — 5

Einen Rechenausdruck aus Zahlen, Rechenzeichen und eventuell Klammern nennt man **Term.**

Beispiel: $\underbrace{\underset{\textbf{1. Summand}}{57} + \underset{\textbf{2. Summand}}{43}}_{\textbf{Summe}} = \underset{\textbf{Wert der Summe}}{100}$

Die Summanden werden **addiert**, die Rechenart heißt **Addition**.

Beispiel: $\underbrace{\underset{\textbf{Minuend}}{79} - \underset{\textbf{Subtrahend}}{38}}_{\textbf{Differenz}} = \underset{\textbf{Wert der Differenz}}{41}$

Der Subtrahend wird vom Minuenden **subtrahiert**, die Rechenart heißt **Subtraktion**.

M5 Terme I — 5

Stelle folgende Terme auf:

1) Addiere die Differenz der Zahlen 4 und –13 zur Summe mit den drei Summanden 13, 25 und –4.
2) Der gesuchte Term ist eine Differenz. Der Minuend ist die Summe aus 22 und –13, der Subtrahend ist eine Differenz, bei der von –200 die Zahl –12 subtrahiert wird.

Lösung:

1) [4 – (–13)] + [13 + 25 + (–4)]
2) [22 + (–13)] – [–200 – (–12)]

M5 Terme II — 6

Beispiel: $\underbrace{\underset{\textbf{1. Faktor}}{6} \cdot \underset{\textbf{2. Faktor}}{11}}_{\textbf{Produkt}} = \underset{\textbf{Wert des Produkts}}{66}$

Die Rechenart heißt **Multiplikation**.

Beispiel: $\underbrace{\underset{\textbf{Dividend}}{42} : \underset{\textbf{Divisor}}{7}}_{\textbf{Quotient}} = \underset{\textbf{Wert des Quotienten}}{6}$

Die Rechenart heißt **Division.**

Multiplizieren mit den Faktoren 0 und 1: $a \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot a = 0$

$a \cdot 1 = a \quad 1 \cdot a = a \quad$ für $a \in \mathrm{IN}_0$

Dividieren mit 0 oder 1: $a : 1 = a \quad 0 : a = 0 \quad$ für $a \in \mathrm{IN}$

Durch „0“ kann man nicht dividieren!

M5 Terme II — 6

Stelle folgende Terme auf:

1) Der Term ist ein Produkt, der 1. Faktor ist die Differenz mit dem Subtrahenden 12 und dem Minuenden 15, der 2. Faktor ist ein Quotient mit dem Dividenden 55 und dem Divisor –5.
2) Bilde die Summe aus drei Summanden, der 1. Summand ist das Produkt aus den Zahlen 55 und –2, der 2. Summand ist der Betrag der Zahl –22 und der dritte Summand ist die Quadratzahl der Zahl 17.

Lösung:

1) [15 – 12] · [55 : (–5)]
2) [55 · (–2)] + |–22| + 17^2

M5 Rechnen mit ganzen Zahlen I | 7

Addition:
Die Zahlen haben die **gleichen** Vorzeichen:

- Addiere die Beträge der beiden Zahlen!
- Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen der beiden Zahlen!

Die Zahlen haben **unterschiedliche** Vorzeichen:

- Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag!
- Gib der Differenz das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag!

Subtraktion:
Statt eine Zahl zu subtrahieren, kann man ihre Gegenzahl addieren:

Subtrahieren einer positiven Zahl	⇔	Addieren der negativen Gegenzahl
Subtrahieren einer negativen Zahl	⇔	Addieren der positiven Gegenzahl

Vereinfachende Schreibweise:
Treffen zwei **gleiche** Vorzeichen aufeinander, so vereinfachen wir zu „**+**“.
Treffen zwei **unterschiedliche** Vorzeichen aufeinander, so vereinfachen wir zu „**–**“.

M5 Rechnen mit ganzen Zahlen I | 7

Beispiele:
Berechne: (+3) + (–16) = 3 – 16 = –13
(–25) + (–120) = –25 – 120 = –145
(+17) + (+32) = 17 + 32 = 49
(–7) – (–33) = –7 + 33 = 26
(+99) – (+340) = 99 – 340 = –241

M5 Rechnen mit ganzen Zahlen II | 8

Multiplikation
Wir multiplizieren ganze Zahlen, indem wir ihre Beträge multiplizieren und dem Produktwert das Vorzeichen nach folgender Regel geben:

Zwei gleiche Vorzeichen ergeben +	(„ + · + = +“ und „ - · - = +“)
Zwei unterschiedliche Vorzeichen ergeben -	(„ + · – = –“ und „– · + = – “)

Division:
Wir dividieren ganze Zahlen, indem wir ihre Beträge dividieren und dem Quotientenwert das Vorzeichen nach folgender Regel geben:

Zwei gleiche Vorzeichen ergeben +	(„ + : + = +“ und „ - : - = +“)
Zwei unterschiedliche Vorzeichen ergeben -	(„ + : – = –“ und „– : + = – “)

Es gilt: 0 : a = 0 (mit a ϵ IN) 0 : 0 existiert nicht!

Achtung Rechen- und Vorzeichen dürfen niemals direkt aufeinanderfolgen!
Man schreibt: 15 : (–3) und nicht 15: –3

M5 Rechnen mit ganzen Zahlen II | 8

Beispiele:
Berechne: (+3) · (–16) = –48
(–25) · (–120) = 3000
(+17) · (+32) = 544
(–7) · (+33) = –231

M5 Potenzen und Primfaktoren | 9

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren schreibt man kurz als **Potenz**:

z.B. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ ← Exponent

Basis

Speziell: $a^0 = 1$

$a^1 = a$ (mit $a \in \mathbb{N}$)

Primfaktorzerlegung:

Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder lässt sich in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen.

z.B. $100 = 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$

Diese Zerlegung nennt man Primfaktorzerlegung.

M5 Potenzen und Primfaktoren | 9

Beispiele:

Zerlege in Primfaktoren:

$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Berechne:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

$-6^2 = -6 \cdot 6 = -36$

M5 Rechengesetze | 10

Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$

Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Assoziativgesetz der Multiplikation: $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$

Distributivgesetz der Multiplikation: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Distributivgesetz der Division: $(a + b) : c = a : c + b : c$ $(c \neq 0)$

Durch das Anwenden des Distributivgesetzes kann man Klammern **auflösen**. Dies nennt man **Ausmultiplizieren**. Manchmal ist es geschickt, das Distributivgesetz umgekehrt so anzuwenden, dass Klammern neu entstehen. Dies nennt man **Ausklammern.**

Achtung: Bei der Division gelten weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz!

Vorfahrtsregel: Die Klammer sagt: „Zuerst komm ich, dann kommt der Punkt und dann der Strich!“
Ansonsten rechnet man schrittweise von links nach rechts.

M5 Rechengesetze | 10

Beispiele:

Berechne durch geschicktes Ausklammern:

$3 \cdot 17 - 17 \cdot 5 - 17) = 17 \cdot (3 - 5 - 1) = 17 \cdot (-3) = -51$

Berechne den Wert des Terms:

$-139 + [(-2)^2 \cdot (-118 + 73)] : 6 - 11 \cdot (-8) =$

$= -139 + [4 \cdot (-45)] : 6 - (-88) =$

$= -139 + (-180) : 6 + 88 =$

$= -139 + (-30) + 88 =$

$= -139 - 30 + 88 =$

$= -169 + 88 =$

$= -81$

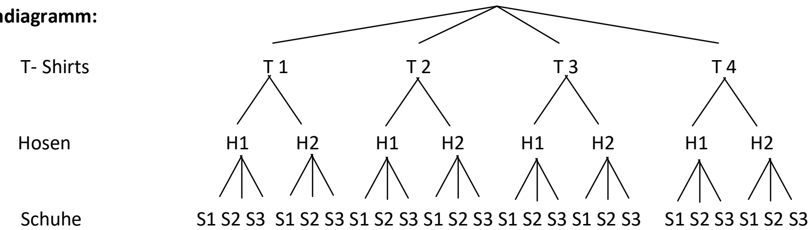
M5 Baumdiagramm und Zählprinzip | 11

Muss man bei Fragestellungen mehrmals hintereinander Entscheidungen treffen, so kann man dies mithilfe eines sogenannten **Baumdiagramms** veranschaulichen. Die Anzahl der Wege durch den Baum liefert die Anzahl aller Möglichkeiten. Liegt ein „regelmäßiges“ Baumdiagramm (d.h. die Anzahl der Möglichkeiten auf einer Stufe sind immer gleich) vor, so kann man auch das **Zählprinzip** anwenden.

M5 Baumdiagramm und Zählprinzip | 11

Petra hat im Urlaub 4 T-Shirts, 2 Hosen und 3 Paar Schuhe dabei. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten hat sie, sich einzukleiden?

Baumdiagramm:



Es gibt 24 Wege durch den Baum (**Pfade**), also hat Petra 24 Möglichkeiten, sich einzukleiden.

Zählprinzip: Sie hat $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ Möglichkeiten.

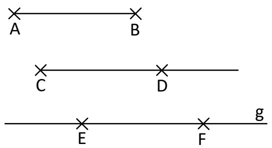
M5 Geometrische Grundbegriffe | 12

Bezeichnungen:

Strecke $\overline{AB}$

Halbgerade [CD

Gerade EF oder g



Jede Strecke hat eine bestimmte **Länge**, man schreibt dafür: $|\overline{AB}|$

Parallele Geraden: $\mathbf{g \parallel h}$

Aufeinander senkrecht stehende Geraden: $\mathbf{g \perp h}$

Der **Abstand** zweier geometrischer Objekte ist immer die Länge der kürzesten Verbindungslinie.

Abstand zweier Punkte A und B: $\mathrm{d}(A; B) = |\overline{AB}|$

Abstand eines Punktes P von einer Geraden g: $\mathrm{d}(P; g)$ = „Länge der Lotstrecke“

Abstand zweier Parallelen g und h: $\mathrm{d}(g; h)$ = „Länge der Lotstrecke“

Alle Punkte eines **Kreises** haben von seinem Mittelpunkt den gleichen Abstand. Diesen Abstand nennt man **Radius des Kreises**, man schreibt $k(M; r)$ (lies: „Kreis um M mit Radius r“)

M5 Geometrische Grundbegriffe | 12

M5 Winkel | 13

Dreht man eine Halbgerade gegen den Uhrzeigersinn um ihren Anfangsspunkt S, so entsteht ein **Winkel.** S heißt **Scheitel** des Winkels, die beiden Halbgeraden nennt man **Schenkel**. Die Größe eines Winkels misst man in **Grad** (kurz: **°**).

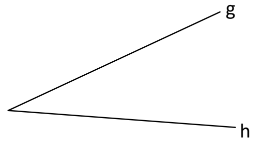
Schreibweise:	$\alpha = \sphericalangle(g;h)$	(g: 1. Schenkel, h: 2. Schenkel)
	$\alpha = \sphericalangle ASB$	(S: Scheitel, [SA: 1. Schenkel, [SB: 2. Schenkel)

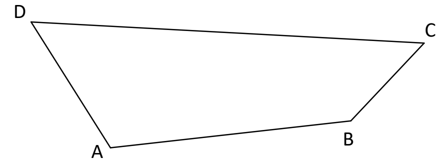
Besondere Winkel:

Rechter Winkel	$\alpha = 90°$	**Gestreckter Winkel**	$\alpha = 180°$
Vollwinkel	$\alpha = 360°$	**spitzer Winkel**	$0° < \alpha < 90°$
stumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$	**überstumpfer Winkel**	$180° < \alpha < 360°$

M5 Winkel | 13

Miss folgende Winkel:





$\alpha = \sphericalangle(g;h) = 331°$

$\beta = \sphericalangle(h;g) = 29°$

$\alpha = \sphericalangle BAD = 117°$ $\quad$ $\gamma = \sphericalangle DCB = 50°$

$\beta = \sphericalangle CBA = 138°$ $\quad$ $\delta = \sphericalangle ADC = 55°$

M5 Vierecke | 14

Ein Viereck mit zwei parallelen Seiten nennt man **Trapez**.
Besitzt ein Trapez eine Symmetrieachse, so ist es ein **gleichschenkliges Trapez**.

Sind bei einem Viereck jeweils die gegenüberliegenden Seiten parallel, so handelt es sich um ein **Parallelogramm**.

Ein Parallelogramm mit vier gleichlangen Seiten ist eine **Raute**.

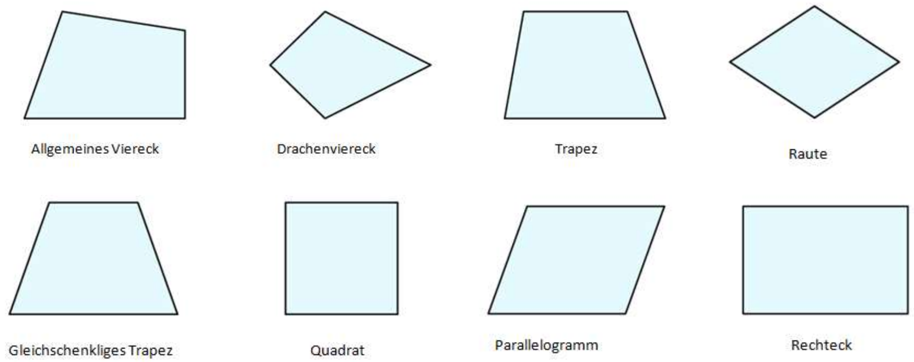
Ein Parallelogramm, bei dem alle Innenwinkel rechte Winkel sind, nennt man **Rechteck**.

Ein Rechteck mit lauter gleichlangen Seiten ist ein **Quadrat**.

Ein **Drachenviereck** ist symmetrisch zu einer seiner beiden **Diagonalen** (das ist die Verbindung gegenüberliegender Ecken).

M5 Vierecke | 14

Um welche Art von Viereck handelt es sich jeweils?



M5 Länge, Masse und Zeit | 15

Länge: 1cm = 10mm 1dm = 10cm 1m = 10dm 1km = 1000m

Masse: 1g = 1000mg 1kg = 1000g 1t = 1000kg

Zeit: 1min = 60s 1h = 60min 1d = 24h

Achtung:

Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen die Größen in die gleiche Maßeinheit umgerechnet werden. Häufig ist eine **Einheitentafel** hilfreich.

Eine Größe wird mit einer Zahl multipliziert (durch eine Zahl dividiert), indem man die Maßzahl mit der Zahl multipliziert und die Maßeinheit beibehält.

Der Quotient zweier Größen der gleichen Art ist eine Zahl.

M5 Länge, Masse und Zeit | 15

Beispiele:
Wandle jeweils in die in Klammern angegebene Einheit um:

23km 25dm (cm) = 2.300.250cm

12m 9dm 4mm (cm) = 1290,4cm

5dm 32cm (m) = 0,82m

3,07kg (g) = 3.070g

3d 17h (h) = 89h

Gib in gemischten Einheiten an:

9030cm = 90m 3dm

3,00702km = 3km 7m 2cm

7,09 dm= 7dm 9mm

3,5h = 3h 30min

12,02t = 12t 20kg

M5 Der Dreisatz und der Maßstab | 16

Dreisatz: Beim Dreisatz muss man aus 3 vorgegebenen Werten einen unbekannten 4. Wert ermitteln.

Beispiel: 5 Stück Kuchen kosten 12€, wie viel muss man für 3 Stück bezahlen?

$$\begin{array}{r l c l l} :5 & \text{5 Stück Kuchen} & \Leftrightarrow & 12€ & :5 \\ & \text{1 Stück Kuchen} & \Leftrightarrow & 2{,}40€ & \\ \cdot 3 & \text{3 Stück Kuchen} & \Leftrightarrow & 7{,}20€ & \cdot 3 \end{array}$$

Der **Maßstab** wird verwendet, um Längen verkleinert oder vergrößert darzustellen.

Die Angabe 1 : 200 in einem Plan bedeutet z.B.: 1cm im Plan entsprechen 200cm in der Wirklichkeit.

Die Angabe 50 : 1 in einem Bild bedeutet z.B.: 50cm im Bild entsprechen 1cm in der Wirklichkeit.

M5 Der Dreisatz und der Maßstab | 16

Beispiel:
In einer Eisdiele gibt es folgendes Angebot. 1 Kugel Eis kostet 1,10€, 6 Kugeln Eis bekommt man hingegen für 6€. Wie viel spart Familie Schmidt, wenn sie insgesamt 14 Kugeln Eis kauft und das Angebot nutzt?

Dreisatz: 1 Kugel Eis ⟺ 1,10€
14 Kugeln Eis ⟺ 15,40€ (1,10€ · 14)

Angebot: 6 Kugeln Eis ⟺ 6€ 1 Kugel Eis ⟺ 1,10€
12 Kugeln Eis ⟺ 12€ 2 Kugeln Eis ⟺ 2,20€

⇨ Gesamtpreis für 14 Kugeln: 12€ + 2,20€ = 14,20€

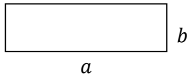
15,40 € - 14,20€ = 1,20€

Antwort: Familie Schmidt spart 1,20€, wenn sie das Angebot nutzt.

M5 Flächeninhalt und Umfang eines Rechtecks/ Oberflächeninhalt eines Quaders | 17

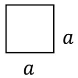
Einheiten: 1cm² = 100mm² 1dm² = 100cm² 1m² = 100dm²
1a = 100m² 1ha = 100a 1km² = 100ha

Flächeninhalt eines Rechtecks:



$A_{Rechteck} = a \cdot b$

Spezialfall: Quadrat



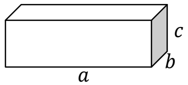
$A_{Quadrat} = a \cdot a = a^2$

Der **Umfang** gibt an, wie lang die Randlinie einer Figur ist:

$U_{Rechteck} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$

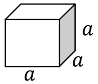
$U_{Quadrat} = 4 \cdot a$

Oberflächeninhalt eines Quaders:



$O_{Quader} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

Spezialfall: Würfel



$O_{Würfel} = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$

M5 Flächeninhalt und Umfang eines Rechtecks/ Oberflächeninhalt eines Quaders | 17

Beispiele:
Ein Rechteck hat die Seitenlängen 3cm und 17dm. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Rechtecks!

$A = a \cdot b = 3cm \cdot 17dm = 3cm \cdot 170cm = 510cm^2 = 5dm^2 10cm^2$

$U = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (3cm + 17dm) = 2 \cdot (3cm + 170cm) = 2 \cdot 173cm = 346cm$
$= 3m\ 4dm\ 6cm$

Ein Würfel hat die Kantenlänge 4cm. Berechne den Oberflächeninhalt des Würfels!

$O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (4cm)^2 = 6 \cdot 4cm \cdot 4cm = 6 \cdot 16cm^2 = 96cm^2$

i