M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen — 1

Erweitern: Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl ≠ 0

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$$

Kürzen: Dividieren von Zähler und Nenner durch die gleiche natürliche Zahl ≠ 0

$$\frac{375}{600} = \frac{375:75}{600:75} = \frac{5}{8} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{375}{600} = \frac{5 \cdot 75}{8 \cdot 75} = \frac{5 \cdot 75 : 75}{8 \cdot 75 : 75} = \frac{5}{8}$$

Vergleichen:

- auf den **gleichen Nenner** bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

  Der Bruch mit dem **größeren Zähler** ist der **größere**.

- auf den **gleichen Zähler** bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} < \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

  Der Bruch mit dem **größeren Nenner** ist der **kleinere**.

- mit einer **dritten Zahl** vergleichen $\frac{2}{5} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$

M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen — 1

Beispiele:

- Erweitere $\frac{43}{52}$ auf den Nenner 468!

  468 : 52 = 9, man muss also mit 9 erweitern: $\frac{43}{52} = \frac{43 \cdot 9}{52 \cdot 9} = \frac{387}{468}$

- Kürze $\frac{68}{391}$ so weit wie möglich / vollständig!

  Primfaktorzerlegung: $68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $391 = 23 \cdot 17$;

  $$\frac{68}{391} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 17}{23 \cdot 17} = \frac{4}{23}$$

- Ordne der Größe nach und beginne mit dem kleinsten Bruch: $\frac{6}{17}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$

  $\frac{1}{5} = \frac{12}{60} < \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$ $\qquad \frac{6}{17} = \frac{12}{34} < \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} < \frac{6}{17} < \frac{1}{2}$

M6 Brüche addieren und subtrahieren — 2

Nur gleichnamige Brüche (gleicher Nenner) **können addiert / subtrahiert werden.**

gleichnamig machen: Der **Hauptnenner** ist das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** aller beteiligten Nenner.

Beispiele: $\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ } die höchsten vorkommenden Potenzen der beteiligten Primfaktoren bilden zusammen den **Hauptnenner:** HN = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

$$\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{20}{72} + \frac{15}{72} = \frac{20+15}{72} = \frac{35}{72}$$

$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ } HN = $2^3 \cdot 3 = 24$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$$

gemischte Zahlen: Man addiert / subtrahiert die **Ganzen und die Brüche getrennt** voneinander; wenn nötig, wandelt man vorher **ein Ganzes des Minuenden in einen Bruch um.**

M6 Brüche addieren und subtrahieren — 2

Beispiele:

- Berechne: $\frac{5}{48} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{48 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 8}{18 \cdot 8} = \frac{15}{146} + \frac{56}{146} = \frac{15+56}{146} = \frac{71}{146}$

- Berechne: $\frac{9}{28} - \frac{11}{12} = \frac{9 \cdot 3}{28 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{27}{84} - \frac{77}{84} = \frac{27-77}{84} = -\frac{50}{84} = -\frac{25}{42}$

- Berechne: $3\frac{3}{8} + 8\frac{7}{18} = (3+8) + \left(\frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 4}{18 \cdot 4}\right) = 11 + \frac{27+28}{72} = 11\frac{55}{72}$

- Berechne: $2\frac{7}{12} - 5\frac{3}{8} = (2-5) + \left(\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}\right) = -3 + \frac{14-9}{24} = -3 + \frac{5}{24} = -2\frac{19}{24}$

  (ein Ganzes umwandeln)

M6 Brüche multiplizieren und dividieren — 3

Zum Multiplizieren / Dividieren muss man Brüche **nicht gleichnamig machen!**

Multiplizieren: $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

(überall hier gilt $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $b, c, d \neq 0$)

Dividieren: **Multiplizieren mit dem Kehrbruch**

$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$

Bruch mal Zahl: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ **Bruch geteilt durch Zahl:** $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Zahl mal Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$ **Zahl geteilt durch Bruch:** $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$

Doppelbrüche: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c$ $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

M6 Brüche multiplizieren und dividieren — 3

Beispiele:

- Berechne: $-\frac{8}{14} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{-8}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{-8 \cdot 7}{14 \cdot 4} = \frac{-8}{2 \cdot 4} = -1$
- Berechne: $-1\frac{3}{4} : 2\frac{5}{8} = \frac{-7}{4} : \frac{21}{8} = \frac{-7}{4} \cdot \frac{8}{21} = \frac{-7 \cdot 8}{4 \cdot 21} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$
- Berechne: $\frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ $2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{2 \cdot 7}{12} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$
- Berechne: $\frac{42}{48} : 7 = \frac{42}{48 \cdot 7} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$ $3 : \frac{9}{28} = 3 \cdot \frac{28}{9} = \frac{3 \cdot 28}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$
- Berechne: $\frac{\frac{27}{31}}{9} = \frac{27}{31} : 9 = \frac{27}{31 \cdot 9} = \frac{3}{31}$ $\frac{15}{\frac{5}{6}} = 15 : \frac{5}{6} = 15 \cdot \frac{6}{5} = \frac{15 \cdot 6}{5} = 18$
- Berechne: $\frac{\frac{17}{32}}{\frac{51}{64}} = \frac{17}{32} : \frac{51}{64} = \frac{17 \cdot 64}{32 \cdot 51} = \frac{2}{3}$

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche — 4

Bruch in Dezimalbruch umwandeln:

Enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruches nur die **Primfaktoren 2 und 5**, so lässt er sich durch Division in einen **endlichen Dezimalbruch** umwandeln:

$\frac{15}{4} = 15 : 4 = 3,75$

-30 (Komma setzen, nachdem die Einer heruntergeholt wurden)

-28

20

-20

0

Enthält der Nenner andere Primfaktoren, so erhält man durch Division einen **unendlichen (periodischen) Dezimalbruch.**

$\frac{15}{22} = 15 : 22 = 0,6\overline{81}$

0

-150

-132

180 ← gleicher Rest ⇒ Periode 81

-176

40

-22

180

-176

$\dots$

Dezimalbruch in Bruch umwandeln:

Stufenzahl als Nenner (Nullenzahl = Kommastellenzahl)

$0,0235 = \frac{235}{10000} = \frac{47}{2000}$ (vollständig kürzen!) $0,\overline{0257} = \frac{257}{9999}$ $0,00\overline{257} = \frac{257}{99900}$

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche — 4

Beispiele:

- Wandle in einen Dezimalbruch um: $-\frac{3}{5}$; $1\frac{3}{4}$; $-\frac{117}{50}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{16}{23}$; $\frac{340}{33}$

  $-\frac{3}{5} = -\frac{60}{100} = -0,60$; $1\frac{3}{4} = 1,75$; $-\frac{117}{50} = -\frac{234}{100} = -2,34$; $\frac{2}{9} = 0,\overline{2}$; $\frac{16}{23} = 16 : 23 =$

  $= 0,\overline{695652173913043478260869565217391304347826086956521739130434782608}$; $\frac{34}{330} = \frac{34 \cdot 3}{33 \cdot 3} : 10 = \frac{102}{99} : 10 = 1\frac{3}{99} : 10 = 1,\overline{03} : 10 = 0,1\overline{03}$

- Wandle in einen Bruch / eine gemischte Zahl um: 2,435 ; 0,08 ; $1,00\overline{37}$; 0,0802

  $2,435 = 2\frac{435}{1000} = 2\frac{87}{200}$; $0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$; $1,00037 = 1\frac{37}{99000}$; $0,0802 = \frac{802}{10000} = \frac{401}{5000}$

- Wandle in einen Dezimalbruch um und runde auf drei Nachkommastellen: $-\frac{16}{23}$; $\frac{7}{16}$; $-\frac{261}{15}$; $\frac{35}{26}$

  $-\frac{16}{23} = -0,6959 \dots \approx -0,696$; $\frac{7}{16} = 0,4375 \approx 0,438$; $-\frac{261}{29} = -9,000$; $\frac{35}{26} = 1,3461 \dots \approx 1,346$

M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten — 5

Addieren / Subtrahieren: **Kommata untereinander** schreiben:

```
  1 , 0 6 3          1' , 0' 6' 4' 3
+ 0 , 1 4 9 7      - 0 , 1 6 6 9
  1 , 2 1 2 7        0 , 8 9 7 4
```

Multiplizieren: Das Ergebnis besitzt **so viele Kommastellen wie beide Faktoren zusammen:**

$1{,}57 \cdot 2{,}69 = 4{,}2233$ $\quad 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}20$ [= 0,2]

```
1 5 7 · 2 6 9
  3 1 4 0 0
    9 4 2 0
    1 4 1 3
  4 2 2 3 3
```

Dividieren: Man **verschiebt das Komma** bei beiden Zahlen **um gleich viele Stellen** so weit nach rechts, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist.

$0{,}364 : 0{,}08 = 3{,}64 : 0{,}8 =$

```
3 6 , 4 : 8 = 4 , 5 5
3 2
  4 4
  4 0
    4 0
    4 0
    - -
```

Beim **Überschreiten des Kommas im Dividenden** setzt man auch **im Ergebnis ein Komma.**

M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten — 5

Beispiele:

- Berechne: 1,66 + 0,4 ; 1,73 + 0,37 ; 61,12 − 4,2 ; 25 − 2,83

1,66	1,73	61,12	25,00
+ 0,40	+ 0,37	− 4,20	− 2,83
2,06	2,10	56,92	22,17

- Berechne: 82,5 · 0,29 ; 0,0045 · 8,8 ; 3,004 · 2,05 ; 0,5 · 2,83

82,5 · 0,29	0,0045 · 8,8	3,004 · 2,05	2,83 · 0,5
16 500	3600	6 00800	1,415
7 425	360	15020	
23,925	0,03960	6,15820	

- Berechne: 38,43 : 0,1 ; 0,054 : 0,45 ; 6,5104 : 2,6

38,43 : 0,1 = 384,3 : 1 = 384,3 $\quad$ 38,43 : 0,1 = 3843 : 10 = 384,3

0,054 : 0,45 = 5,4 : 45 = 0,12 $\quad$ 0,054 : 0,45 = 54 : 450 = 0,12

6,5104 : 2,6 = 65,104 : 26 = 2,504 $\quad$ 6,5104 : 2,6 = 65104 : 26000 = 2,504

M6 Zehnerpotenzen — 6

Stufenzahl

⋮

10^3 = 1 000 ..... eine Eins mit **3** Nullen
10^2 = 100 ..... eine Eins mit **2** Nullen
10^1 = 10 ..... eine Eins mit **1** Null
10^0 = 1
10^{-1} = 0,1 ..... eine Eins an der **1.** Nachkommastelle
10^{-2} = 0,01 ..... eine Eins an der **2.** Nachkommastelle
10^{-3} = 0,001 ..... eine Eins an der **3.** Nachkommastelle

⋮

Multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10^1 , 10^2, 10^3, …
so rückt das Komma um **1**; **2**; **3**; … Stellen **nach rechts**

Multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10^{-1} , 10^{-2}, 10^{-3}, …
bzw. dividiert man einen Dezimalbruch durch 10^1 , 10^2, 10^3, …
so rückt das Komma um **1**; **2**; **3**; … Stellen **nach links**

M6 Zehnerpotenzen — 6

Beispiele:

- Berechne (Kommaverschiebung): 73,29 · 10 ; 0,362 · 100 ; 4,2 : 1000 ; 0,0047 : 100

73,29 · 10 = 732,9 ; 0,362 · 100 = 36,2 ; 4,2 : 1000 = 0,0042 ; 0,0047 : 100 = 0,000047

- Schreibe dezimal: $5 \cdot 10^{-2}$; 5^{-2} ; 10^{-5} ; $5{,}2 \cdot 10^5$; $765 \cdot 10^{-7}$; $0{,}0004829 \cdot 10^5$

$5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$; $10^{-5} = 0{,}00001$; $5{,}2 \cdot 10^5 = 520000$;

$765 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000765$; $0{,}0004829 \cdot 10^5 = 48{,}29$

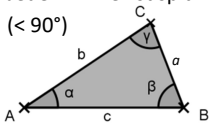
- Schreibe mit Hilfe einer Zehnerpotenz so um, dass die Zahlen nur eine Vorkommastelle besitzen:

8000000 ; 5379000000 ; 75 ; 0,0000697 ; 6,3 ; 0,24 ; 511000000 km²

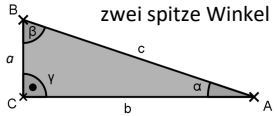
$8000000 = 8 \cdot 10^6$; $5379000000 = 5{,}379 \cdot 10^9$; $75 = 7{,}5 \cdot 10^1$; $0{,}0000697 = 6{,}97 \cdot 10^{-5}$;

$6{,}3 = 6{,}3 \cdot 10^0$; $0{,}24 = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$; 511000000 km² = $5{,}11 \cdot 10^8$ km²

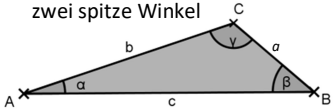
spitzwinkliges Dreieck:
Jeder Winkel ist spitz (< 90°)



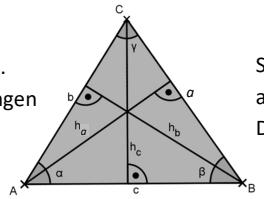
rechtwinkliges Dreieck:
Ein rechter Winkel, zwei spitze Winkel



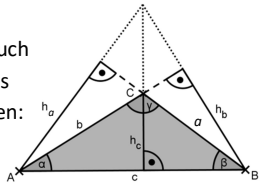
stumpfwinkliges Dreieck
Ein stumpfer Winkel (> 90°), zwei spitze Winkel



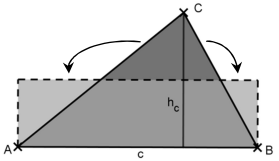
Höhen im Dreieck:
Jedes Dreieck besitzt **drei Höhen**.
Die Höhen bzw. ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt.



Sie können auch außerhalb des Dreiecks liegen:

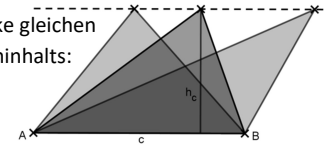


Flächeninhalt eines Dreiecks:

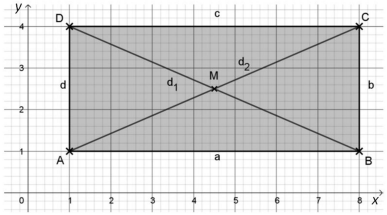


$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Dreiecke gleichen Flächeninhalts:



Beispiele:



- Im Rechteck *ABCD* halbiert *M* die beiden Diagonalen d_1 und d_2. Begründe, dass die Dreiecke ΔBCM und ΔABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen jedoch auszurechnen. *(nach einer Abituraufgabe von 2019)*

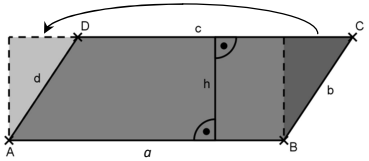
  Lösung: Die Streckenlängen $|\overline{AM}|$ und $|\overline{MC}|$ sind gleich groß, da *M* die Diagonale d_2 halbiert. Wählt man diese beiden Strecken als Grundlinie der Dreiecke ΔBCM und ΔABM, so haben die Dreiecke außerdem die gleiche Höhe, nämlich *d(B ; AC)*, den Abstand des Punktes *B* von *AC*, da der Punkt *B* die Spitze beider Dreiecke bildet. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAMD aus der Aufgabe oben.
  (Entnimm fehlende Angaben der obigen Zeichnung.)

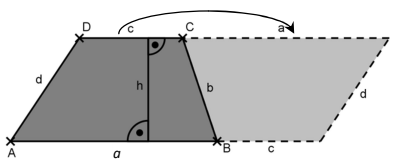
  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_a$ mit $h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$ [LE]

  $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3{,}5 = 1{,}5 \cdot 3{,}5 = \underline{5{,}25}$ [FE]

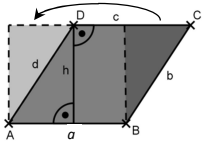
Parallelogramm: $A = a \cdot h$

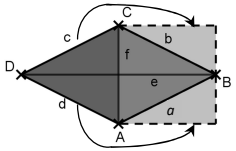


Trapez: $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

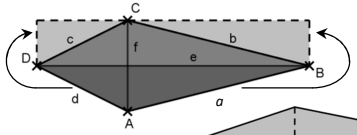


Raute: $A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$





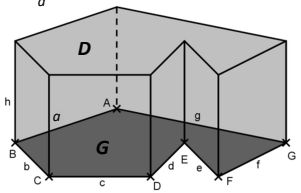
Drachenviereck: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$



Oberfläche gerader Prismen:

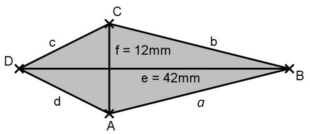
$A = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$

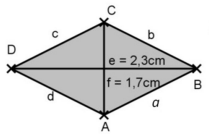
G: Grundfläche = Deckfläche ***D***
M: Mantelfläche
U: Umfang von ***G***

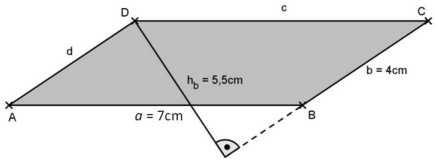


Beispiele:

- Berechne jeweils den Flächeninhalt in cm²:







Drache: $A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 12\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 6\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 252\text{mm}^2 = \underline{2{,}52\text{cm}^2}$

Raute: $A_R = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 2{,}3\text{cm} \cdot 1{,}7\text{cm} = 1{,}15\text{cm} \cdot 1{,}7\text{cm} = \underline{1{,}955\text{cm}^2}$

Parallelogramm: $A_P = b \cdot h_b = 4\text{cm} \cdot 5{,}5\text{cm} = \underline{22\text{cm}^2}$

- Bestimme für ein Trapez *ABCD* mit $a \parallel c$ die fehlenden Größen: Gegeben sind

  $b = 10{,}6\text{cm}$; $c = 14\text{cm}$; $d = 65\text{mm}$; $A = 43{,}96\text{cm}^2$; $U = 32{,}8\text{cm}$

  $a = U - (b + c + d) = 32{,}8\text{cm} - (10{,}6 + 14 + 6{,}5)\text{cm} = \underline{1{,}7\text{cm}}$

  $h = A : [(a + c) : 2] = \frac{2 \cdot A}{a + c} = \frac{2 \cdot 43{,}96\text{cm}^2}{1{,}7\text{cm} + 14\text{cm}} = \frac{87{,}92\text{cm}}{15{,}7} = \underline{5{,}6\text{cm}}$

M6 Volumina — 9

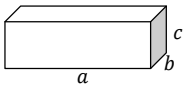
Das **Volumen eines Körpers** gibt an, welchen **Rauminhalt** er besitzt.

Einheiten: $1\ cm^3 = 1\,000\ mm^3$ $1\ dm^3 = 1\,000 cm^3$ $1\ m^3 = 1\,000 dm^3$

$1\ cm^3 = 1\ m\ell$ $1\ dm^3 = 1\ \ell$ $1\ h\ell = 100\ \ell$

$1\ km^3 = 1\ km \cdot 1\ km \cdot 1\ km = 1\,000\ m \cdot 1\,000\ m \cdot 1\,000\ m = 1\,000\,000\,000\ m^3$

Volumen eines Quaders:



$$V_{Quader} = a \cdot b \cdot c$$

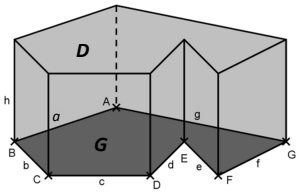
Spezialfall: Würfel

$$V_{Würfel} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Volumen anderer Körper: **Zerlegen** in Quader / Würfel oder **Ergänzen** zu Quadern / Würfeln

Volumen eines geraden Prismas: Grundfläche ***G*** mal Höhe ***h***

$$V_{gerades\ Prisma} = G \cdot h$$



M6 Volumina — 9

Beispiele:

- Eine quaderförmige Waschmittelpackung ist 25cm lang, 12cm breit und 16cm hoch. Sie wird bis zur Höhe von 14cm mit Waschpulver befüllt. Berechne das Volumen V_P des Pulverinhalts und das nicht befüllte Restvolumen V_R der Packung jeweils in ℓ.

  $V_P = (25 \cdot 12 \cdot 14)cm^3 = 4200cm^3 = \underline{4{,}2\ell}$; $V_R = (25 \cdot 12 \cdot 2)cm^3 = 600cm^3 = \underline{0{,}6\ell}$

- In eine leere Baugrube mit $80m^2$ Grundfläche sind $16h\ell$ Wasser gelaufen. Berechne, wie hoch das Wasser in der Baugrube steht, wenn nichts versickert.

  $16h\ell = 1600\ell = 1600dm^3$; $h = V : A = 1600dm^3 : 80m^2 = 1600dm^3 : 8000dm^2 = 0{,}5dm = \underline{\underline{5cm}}$

M6 Anteile, Bruchteile, Prozentangaben — 10

Man schreibt den Quotienten ***Z : N*** oft als **Bruch** $\frac{Z}{N}$. Ein Bruch besteht immer aus **Zähler *Z*** und **Nenner *N***.

Der **Anteil** $\frac{Z}{N}$ **eines Ganzen** bedeutet:

Man teilt das Ganze in ***N* gleich große Teile** und **nimmt *Z* solcher Teile**.

$$\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Anteil}} \underbrace{\text{von } 100\text{kg}}_{\text{Ganzes}} = \left(\frac{1}{4} \text{ von } 100\text{kg}\right) \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot 100\text{kg} = \frac{3 \cdot 100\text{kg}}{4} = \frac{3 \cdot 25\text{kg}}{1} = \underbrace{75\text{kg}}_{\text{Bruchteil}}$$

Prozentangaben:

Auf den **Nenner 100** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Prozent** an:

z.B. $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$

Auf den **Nenner 1000** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Promille** an:

z.B. $0{,}25\% = \frac{0{,}25}{100} = \frac{2{,}5}{1000} = 2{,}5‰$

M6 Anteile, Bruchteile, Prozentangaben — 10

Beispiele:

- Berechne den Bruchteil: $\frac{7}{12}$ von 60h ; $\frac{7}{12}$ von $60h = \frac{7}{12} \cdot 60h = \frac{7 \cdot 60h}{12} = 35h$
- Berechne den Anteil, den 6cm von 8cm bilden. $\frac{6cm}{8cm} = \frac{3}{4}$
- Gib den Anteil in der in Klammern angegeben Einheit an: 5min (1h) 12cm (1m)

  $\frac{5min}{1h} = \frac{5min}{60min} = \frac{1}{12}$ $\frac{12cm}{1m} = \frac{12cm}{100cm} = \frac{3}{25}$

- Gib die Anteile jeweils in Prozent an: $\frac{3}{25}$; $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 12\%$

  $\frac{11}{20}$; $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100} = 55\%$

- Gib die Anteile jeweils in Promille an: $\frac{3}{25}$; $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 40}{25 \cdot 40} = \frac{120}{1000} = 120‰$

  $\frac{1}{200}$; $\frac{1}{200} = \frac{1 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{5}{1000} = 5‰$

Prozentsatz *von* dem Grundwert = Prozentwert

Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Abkürzung: **PS · GW = PW**

30% *von* 7000€ = 2100€ (Prozentwert gesucht)

30% · 7000€ = 2100€

Auflösen durch vergleichen:

15% · *x* = 2100€ (Grundwert gesucht) **$x \cdot 2500€ = 3000€$** (Prozentsatz gesucht)

2 · x = 6 *x = 6 : 2* Vergleichsgleichung *x · 3 = 6* *x = 6 : 3*

x = 2100€ : 15% =

= 2100€ : 0,15 =

= 2100€ : $\frac{15}{100}$ =

= 2100€ · $\frac{100}{15}$ = $\frac{2100€ \cdot 20}{3}$ = 700€ · 20 = 14000€

x = 3000€ : 2500€ =

= $\frac{3000€}{2500€}$ = $\frac{30}{25}$ = $\frac{120}{100}$ = 120%

M6 Prozentrechnung – Grundgleichung der Prozentrechnung 11

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

  PW = 58% von 60min = 58% · 60min = $\frac{58 \cdot 60min}{100}$ = $\frac{58 \cdot 3min}{5}$ = $\frac{174min}{5}$ = 34,8min

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ; PS = PW : GW

  PS = $\frac{54min}{1h}$ = $\frac{54min}{60min}$ = $\frac{9}{10}$ = 0,9 = 90%

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ; GW = PW : PS

  GW = $\frac{12min}{60\%}$ = $\frac{12min}{\frac{60}{100}}$ = $\frac{12min \cdot 100}{60}$ = $\frac{100min}{5}$ = 20min

Dieser **Lösungsweg ist unabhängig** davon, welche der drei Größen (Prozentsatz, Grundwert oder Prozentwert) aus der „Grundgleichung der Prozentrechnung“ gesucht ist!

Wie viel sind 15% von 3500€ ? (Prozentwert gesucht)

100% ≙ 3500€

15% ≙ *x* [€]

Wie viel Prozent entsprechen 1050€ von 3500€ ? (Prozentsatz gesucht)

100% ≙ 3500€

x [%] ≙ 1050€

5% Zins sind 175€. Wie groß ist das Vermögen ? (Grundwert gesucht)

5% ≙ 175€

100% ≙ *x* [€]

Diagonal multiplizieren und durch die übriggebliebene Angabe teilen (verkürzter Dreisatz):

x [€] = $\frac{15\% \cdot 3500€}{100\%}$ = = 15 · 35€ = = 525€

x [%] = $\frac{100\% \cdot 1050€}{3500€}$ = = $\frac{1050\%}{35}$ = = 30%

x [€] = $\frac{100\% \cdot 175€}{5\%}$ = = 100 · 35€ = = 350€

M6 Prozentrechnung – (verkürzter) Dreisatz 12

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

  100% ≙ 1h = 60min

  58% ≙ *x* [min]

  x = $\frac{58 \cdot 60min}{100}$ = $\frac{58 \cdot 3min}{5}$ = $\frac{174min}{5}$ = 34,8min

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ;

  100% ≙ 1h = 60min

  x [%] ≙ 54min

  x = $\frac{100\% \cdot 54min}{1h}$ = $\frac{100\% \cdot 54min}{60min}$ = $\frac{100\% \cdot 9}{10}$ = 90%

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ;

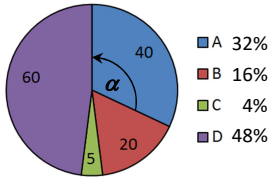
  100% ≙ *x* [min]

  60% ≙ 12min

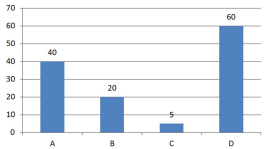
  x = $\frac{100\% \cdot 12min}{60\%}$ = $\frac{100min}{5}$ = 20min

Anteile lassen sich gut durch **Diagramme** veranschaulichen:

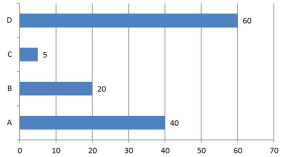
Kreisdiagramm



Säulendiagramm



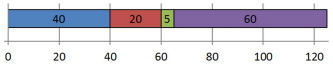
Balkendiagrammm



Beim Kreisdiagramm entspricht die Größe des **Mittelpunktswinkels** α dem jeweiligen Anteil:

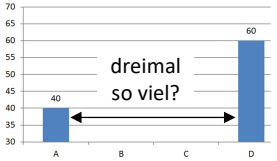
$\alpha = \frac{40}{125} \cdot 360° = \frac{32}{100} \cdot 360° = \mathbf{32\% \cdot 360°} = 0{,}32 \cdot 360° = \underline{\underline{\mathbf{115{,}2°}}}$

Streifendiagramm

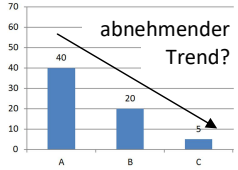


Verfälschung von Diagrammen:

Die Hochwertachse **beginnt nicht bei Null:**



Nur eine **Auswahl der Daten** wird dargestellt (D = 60 fehlt):



Beispiele:

Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:
Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.
Erstelle ein Kreis-, Säulen-, Balken- und Streifendiagramm.

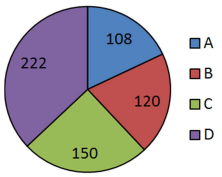
Berechnung der Anteile: 108 + 120 + 150 + 222 = 600 (Gesamtstimmenzahl)

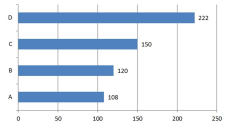
A: $\frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\%$ B: $\frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\%$ C: $\frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\%$ D: $\frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$

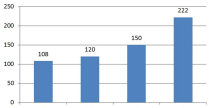
Berechnung der Mittelpunktswinkel:

A: $\frac{18}{100} \cdot 360° = 64{,}8°$ B: $\frac{20}{100} \cdot 360° = 72°$

C: $\frac{25}{100} \cdot 360° = 90°$ D: $\frac{37}{100} \cdot 360° = 133°$



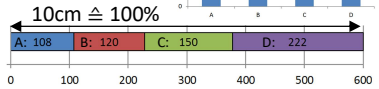




Berechnung der Säulen- / Balken- / Streifenlängen:

A: $\frac{18}{100} \cdot 10\text{cm} = 1{,}8\text{cm}$ B: $\frac{20}{100} \cdot 10\text{cm} = 2{,}5\text{cm}$

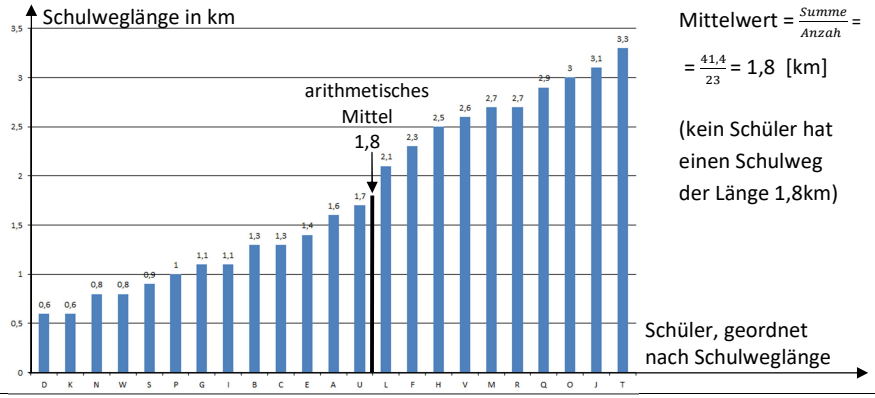
C: $\frac{25}{100} \cdot 10\text{cm} = 2{,}0\text{cm}$ D: $\frac{37}{100} \cdot 10\text{cm} = 3{,}7\text{cm}$



Das **arithmetische Mittel** wird berechnet als $\frac{Summe\ der\ einzelnen\ Werte}{Gesamtanzahl\ an\ Werten}$.

Andere Namen für das arithmetische Mittel sind **Durchschnitt, Mittelwert** oder nur **Mittel.**

Häufig stimmt das arithmetische Mittel **mit keinem der Werte des Datensatzes überein:**



Mittelwert = $\frac{Summe}{Anzah}$ =

= $\frac{41{,}4}{23}$ = 1,8 [km]

(kein Schüler hat einen Schulweg der Länge 1,8km)

0,6
0,6
0,8
0,8
0,9
1,0
1,1
1,1
1,3
1,3
1,4
1,6
1,7
2,1
2,3
2,5
2,6
2,7
2,7
2,9
3,0
3,1
+ 3,3
41,4

Beispiele:

Bestimme von jedem Datensatz das arithmetische Mittel und gib den Wert / die Werte des Datensatzes an, der / die dem arithmetischen Mittel am nächsten kommt / kommen:

3cm; 2cm; 5cm; 3cm; 3cm; 4cm; 2cm; 4cm

12,4kg; 14,2kg; 14,4kg; 11,6kg; 12,4kg

2,50m; 2,10m; 1,80m; 1,90m; 1,75m; 2,10m; 2,55m

Mittelwerte:

(3cm + 2cm + 5cm + 3cm + 3cm + 4cm + 2cm + 4cm) : 8 = 4,5cm; am nächsten: 5cm; 4cm; 4cm

(12,4kg + 14,2kg + 14,4kg + 11,6kg + 12,4kg) : 5 = 13,0kg; am nächsten: 12,4kg; 12,4kg

(2,50m + 2,10m + 1,80m + 1,90m + 1,75m + 2,10m + 2,55m) : 7 = 2,10m;

am nächsten: 2,10m; 2,10m

(mehrere Daten können gleich weit vom Mittelwert entfernt sein oder diesen sogar erreichen)

M6 Absolute und relative Häufigkeit

Die **absolute Häufigkeit** ist eine Anzahl (z.B. 6 Schüler, die ein Haustier besitzen).

Die zugehörige **relative Häufigkeit** ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Beispiel:

6 von 30 Schülern besitzen ein Haustier

relative Häufigkeit der Haustierbesitzer $= \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$ [jeder fünfte Schüler]

Relative Häufigkeiten werden oft in Prozentschreibweise angegeben.

M6 Relative Häufigkeit

Beispiele:

- Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:
  Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.
  Berechne die relativen Häufigkeiten jeweils als Anteile und in Prozent.

  Berechnung der Anteile: 108 + 120 + 150 + 222 = 600 (Gesamtstimmenzahl)

  A: $\frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\%$ B: $\frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\%$ C: $\frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\%$ D: $\frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$

- Von den 800 Schülern einer Schule haben 7% blonde, 32% hellbraune, 43% dunkelbraune, 3% rötliche und 14% schwarze Haare. Berechne die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Haarfarben.

  100% $\triangleq$ 800 Schüler;

  blond: $\frac{7}{100} \cdot 800 = 56$ hellbraun: $\frac{32}{100} \cdot 800 = 256$ dunkelbraun: $\frac{43}{100} \cdot 800 = 344$

  rötlich: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 24$ schwarz: $\frac{14}{100} \cdot 800 = 112$