M7 Terme

1

Um mathematische Sachverhalte kurz beschreiben zu können, verwendet man **Terme**. Diese bestehen aus **Variablen** (Stellvertreter für Zahlen), Zahlen, Rechenzeichen und Klammern.

Setzt man für die Variablen Zahlen ein, so erhält man den **Termwert**.

Zwei Terme heißen **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei jeder möglichen Einsetzung von Zahlen für die Variablen den gleichen Termwert ergeben.

M7 Terme

1

Beispiele:

$T(x) = 3x + 7$ oder $A(l; b) = 3l \cdot 4b + 5l^2$ sind zwei Terme.

Termwerte $T(-3) = 3 \cdot (-3) + 7 = -9 + 7 = -2$
oder $A(2cm; 3cm) = 3 \cdot 2cm \cdot 4 \cdot 3cm + 5 \cdot (2cm)^2 = 72cm^2 + 20cm^2 = 92cm^2$

Die beiden Terme $T_1(x) = x(3 - x)$ und $T_2(x) = 3x - x^2$ sind äquivalent, da man sie durch Termumformungen (siehe M7 – 2) ineinander umwandeln kann.

Die beiden Terme $T_3(x) = x - 2$ und $T_4(x) = x^2$ sind nicht äquivalent,
da $T_3(1) = -1$ und $T_4(1) = 1$

M7 Rechnen mit Termen I

2

Beim Rechnen mit Termen muss man folgende Gesetze beachten:

1) Für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ $\quad a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: $a + (b + c) = a + b + c = (a + b) + c$ $\quad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\quad (a + b) : c = a : c + b : c$ $\quad (c \neq 0)$

2) Umformungen in Produkten:

Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Gleicher Exponent: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Potenzen von Potenzen: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $n, m \in \mathbb{N}$)

3) **Klammerregeln:**
Steht ein Plus vor der Klammer, so kann die Klammer einfach weggelassen werden. Steht ein Minus vor der Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer alle Vorzeichen umdrehen.

M7 Rechnen mit Termen I

2

Beispiele:

$5 \cdot (x + 3y) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3y = 5x + 15y$

$2^4 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

$x^2 \cdot x^5 = x^7$

$x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$

$5 + (3 - 2x) = 5 + 3 - 2x$

$5 - (3 - 2x) = 5 - 3 + 2x$

Ausklammern und Ausmultiplizieren:

1) Löst man eine Klammer mithilfe des Distributivgesetzes auf, so nennt man dies **Ausmultiplizieren.**
2) Wird eine Summe durch Anwendung des Distributivgesetzes in ein Produkt umgeformt, so spricht man von **Faktorisieren** (Ausklammern).

Multiplizieren von Summen:

$$(a+b)\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y + b\cdot x + b\cdot y = ax + ay + bx + by$$

M7 Rechnen mit Termen II 3

Beispiele:

Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich!

$3x\cdot(5x^2-9) = 3x\cdot 5x^2 - 3x\cdot 9 = 15x^3 - 27x$

$-\frac{2}{3}x^2\cdot(6x-12) = -\frac{2}{3}x^2\cdot 6x + \frac{2}{3}x^2\cdot 12 = -4x^3 + 8x^2$

$(0{,}5a^2-2b)\cdot(a+0{,}4b^2) = 0{,}5a^2\cdot a + 0{,}5a^2\cdot 0{,}4b^2 - 2b\cdot a - 2b\cdot 0{,}4b^2 = 0{,}5a^3 + 0{,}2a^2b^2 - 2ab - 0{,}8b^3$

Faktorisiere soweit wie möglich!

$16ab^2 - 12a^2b = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot b\cdot b - 2\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot b = 2\cdot 2\cdot a\cdot b\cdot(2\cdot 2\cdot b - 3\cdot a) = 4ab\cdot(4b-3a)$

1. binomische Formel: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

2. binomische Formel: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

3. binomische Formel: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

M7 Die binomischen Formeln 4

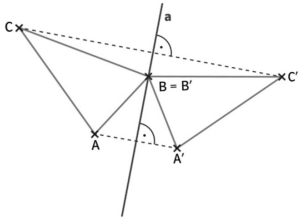
$(x+0{,}5y^2)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 0{,}5y^2 + (0{,}5y^2)^2 = x^2 + xy^2 + 0{,}25y^4$

$\left(\frac{2}{3}a - 2{,}5\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2{,}5 + 2{,}5^2 = \frac{4}{9}a^2 - 3\frac{1}{3}a + 6{,}25$

$(m^3-3a^2)(m^3+3a^2) = (m^3)^2 - (3a^2)^2 = m^6 - 9a^4$

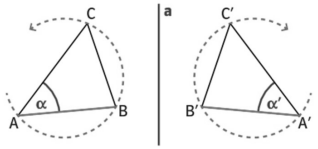
M7 Achsensymmetrie | 5

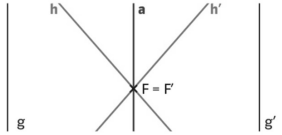
Figuren, die durch Spiegelung an einer Achse a ineinander übergehen, nennt man **achsensymmetrisch bezüglich der Achse a**.



Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren:

- Sind C und C' symmetrisch bezüglich der Achse a, so gilt: Die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ steht senkrecht auf a und wird von ihr halbiert.
- Liegt ein Punkt auf der Achse, so stimmt er mit seinem Spiegelpunkt überein, man nennt ihn **Fixpunkt** (B ist ein Fixpunkt).
- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang, z.B. $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß, haben jedoch einen umgekehrten Drehsinn.
- Zueinander symmetrische Geraden sind parallel oder schneiden sich in einem Fixpunkt.



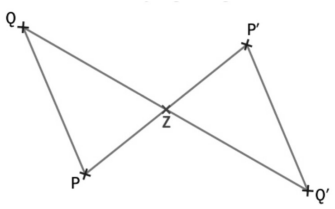


M7 Achsensymmetrie | 5

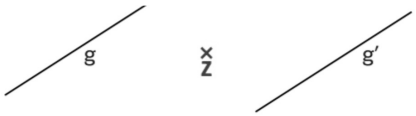
M7 Punktsymmetrie | 6

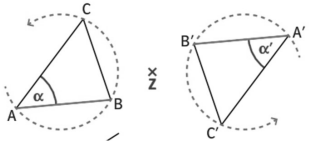
Figuren, die nach einer Drehung um 180° an einem Punkt Z mit sich selbst zur Deckung kommen, nennt man **punktsymmetrisch bezüglich des Punktes Z**. Der Punkt Z heißt **Symmetriezentrum**.

Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren:



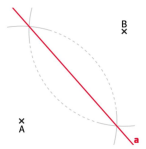
- Wenn P und P' punktsymmetrisch bezüglich Z sind, dann halbiert Z die Strecke $\overline{PP'}$, d.h. $|\overline{PZ}| = |\overline{P'Z}|$
- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang und parallel: $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$ und $|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$
- Zueinander symmetrische Geraden sind parallel: $PQ \parallel P'Q'$
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben den gleichen Umlaufsinn.



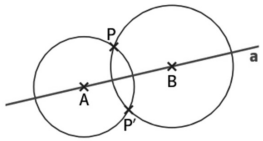


M7 Punktsymmetrie | 6

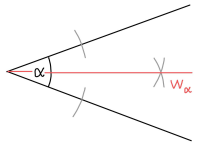
Konstruieren der Symmetrieachse
Sind A und B zueinander symmetrische Punkte, so zeichnet man um A und B je einen Kreis mit demselben Radius r $(r > \frac{1}{2}|\overline{AB}|)$, so dass sich die Kreislinien schneiden. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte ist die Symmetrieachse a.



Konstruieren von Spiegelpunkten
Wähle auf der Symmetrieachse a zwei beliebige Punkte A und B und zeichne die Kreise $k(A; |\overline{AP}|)$ und $k(B; |\overline{BP}|)$. P und P' sind die beiden Schnittpunkte der Kreise und sind achsensymmetrisch bezüglich a.



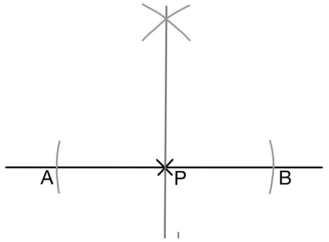
Konstruieren der Winkelhalbierenden
Zeichne einen Kreis um den Scheitel mit beliebigem Radius, dieser schneidet die beiden Schenkel zwei Punkten. Die Symmetrieachse dieser beiden Punkte ist die Winkelhalbierende w_α.



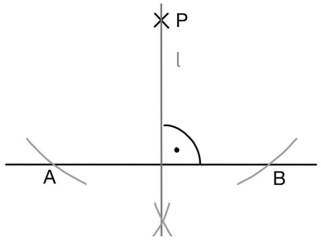
M7 Grundkonstruktionen 7

Aufgaben:

1) Fälle und errichte ein Lot auf eine Gerade!



Lot errichten



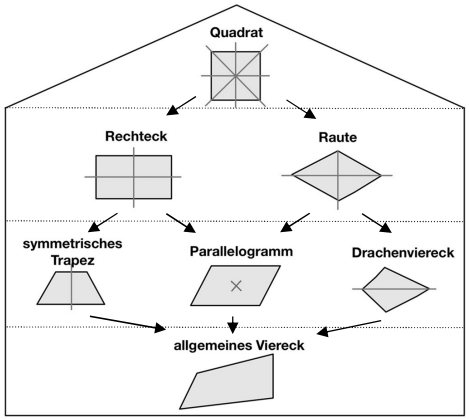
Lot fällen

2) Konstruiere einen Winkel der Größe 67,5°!
Konstruiere zuerst ein Lot (90°), dann die Winkelhalbierende (45°) und halbiere diesen Winkel nochmals (22,5°). Der gesuchte Winkel ergibt sich als: 45° + 22,5°

Man kann die verschiedenen Vierecke anhand ihrer Symmetrieeigenschaften einteilen:

1) Achsensymmetrische Vierecke mit:
- einer Symmetrieachse:
  achsensymmetrisches Trapez, Drachen
- zwei Symmetrieachsen:
  Rechteck, Raute
- vier Symmetrieachsen:
  Quadrat

2) Jedes punktsymmetrische Viereck ist ein Parallelogramm.



M7 Symmetrische Vierecke 8

Aufgaben:

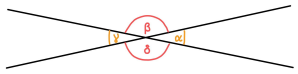
1) Gib Eigenschaften der Raute an, die ein Drachenviereck nicht hat!
2) Gib zwei gemeinsame Eigenschaften von Parallelogramm und Quadrat an!
3) Zu welcher Vierecksart gehört das Viereck?
   a) Nur die zwei Mittelsenkrechten sind Symmetrieachsen.
   b) Nur die zwei Diagonalen sind Symmetrieachsen.

Lösung:

1) z.B. Bei der Raute sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang,
   die Raute ist punktsymmetrisch.
2) Beide Vierecke sind punktsymmetrisch und gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang.
3a) Rechteck
3b) Raute

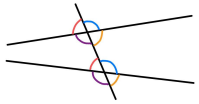
M7 Winkelbetrachtungen | 9

Scheitelwinkel und Nebenwinkel
An einer Geradenkreuzung nennt man zwei gegenüberliegende Winkel **Scheitelwinkel** und zwei nebeneinanderliegende Winkel **Nebenwinkel**. Scheitelwinkel sind gleich groß, Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

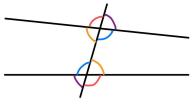


$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta$
$\alpha + \beta = 180°$

Stufenwinkel und Wechselwinkel
Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, so nennt man die jeweils gleich gefärbten Winkel an den Geraden **Stufenwinkel** bzw. **Wechselwinkel**.

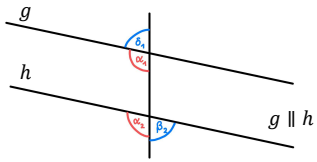


Stufenwinkel



Wechselwinkel

Sind zwei Geraden g und h parallel, dann sind Stufenwinkel gleich groß und Wechselwinkel gleich groß ($\alpha_1 = \alpha_2, \delta_2 = \beta_2$)

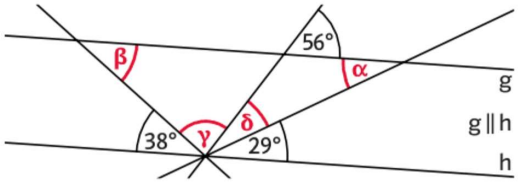


Wenn Stufen- bzw. Wechselwinkel an zwei Geraden g und h gleich groß sind, dann sind g und h zueinander parallel. (Kehrsatz)

M7 Winkelbetrachtungen | 9

Aufgabe:

In der abgebildeten Figur gelte $g \parallel h$. Berechne die Größe der Winkel α, β, γ und δ!



Lösung:

$\beta = 38°$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)

$\delta + 29° = 56°, \delta = 56° - 29° = 27°$ (Stufenwinkel an parallelen Geraden)

$38° + \gamma + \delta + 29° = 180°, \gamma = 180° - \delta - 38° - 29° = 86°$ (ein gestreckter Winkel beträgt 180°)

$\alpha = 29°$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)

M7 Winkelsumme | 10

Winkelsumme im Dreieck:
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Größen der drei Innenwinkel 180°!

Winkelsumme im Viereck:
In jedem Viereck beträgt die Summe der Größen der vier Innenwinkel 360°!

Winkelsumme im Vieleck:
In einem Vieleck mit n Ecken beträgt die Winkelsumme: $(n-2) \cdot 180°$!

M7 Winkelsummen | 10

Aufgaben:

1) Berechne die Größe jedes Innenwinkels in einem regulären 8-Eck!
2) Ermittle, welches Vieleck die Winkelsumme 1260° hat!
3) In einem Parallelogramm ist der eine Innenwinkel doppelt so groß wie der andere. Berechne die Größe aller Innenwinkel!

Lösung:

1) Winkelsumme im 8-Eck: $(8-2) \cdot 180° = 1080°$
In einem regulären Vieleck sind alle Innenwinkel gleich groß: $1080° : 8 = 135°$
=> Jeder Innenwinkel in einem regulären 8-Eck ist 135° groß.

2) 1260° : 180° = 7 , $7 + 2 = 9$
=> Es handelt sich um ein 9-Eck.

3) In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß ($\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$).
Mit $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ folgt: $2\alpha + 2\beta = 360°$
Mit $\alpha = 2\beta$ folgt: $4\beta + 2\beta = 360°$ beziehungsweise $6\beta = 360°, \beta = 60°$
=> Die Innenwinkel sind 60° und 120° groß.

M7 Gleichungen | 11

Verbindet man zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander, so entsteht eine **Gleichung**:
z.B. $3x + 2 = 5$

Die Menge aller Zahlen, die man für die Variable in die Gleichung einsetzen darf, nennt man **Grundmenge G**.

Ergeben sich durch das Einsetzen einer Zahl für die Variable die gleichen Termwerte auf beiden Seiten der Gleichung, so nennt man diese Zahl **Lösung der Gleichung**.

Im Beispiel: $3x + 2 = 5$

$x = 2$ einsetzen: $3 \cdot 2 + 2 = 5$ ⇨ $8 = 5$ ↯ Widerspruch
⇨ $x = 2$ ist keine Lösung der Gleichung.

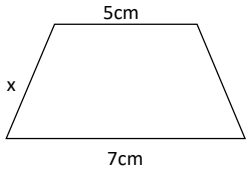
$x = 1$ einsetzen: $3 \cdot 1 + 2 = 5$ ⇨ $5 = 5$ wahre Aussage
⇨ $x = 1$ ist Lösung der Gleichung.

M7 Gleichungen | 11

Aufgaben:

1) Begründe, dass -3 eine Lösung der Gleichung ist: $5(x-2) - 2(3+6x) = 5$

2) Der Umfang des symmetrischen Trapezes beträgt 42cm. Stelle eine Gleichung auf und bestimme die Lösung der Gleichung durch systematisches Probieren!



Lösung:

1) $x = -3$ einsetzen: linke Seite: $5 \cdot (-3-2) - 2 \cdot \big(3 + 6 \cdot (-3)\big) = 5 \cdot (-5) - 2 \cdot (3-18)$
$= -25 - 2 \cdot (-15) = -25 + 30 = 5$ rechte Seite: 5
⇨ -3 ist eine Lösung der Gleichung

2) Gleichung: $x + 5cm + 7cm + x = 42cm$ ⇨ $2x + 12cm = 42cm$
Systematisches Probieren:
$x = 5cm$ einsetzen: $2 \cdot 5cm + 12cm = 22cm < 42cm$
$x = 10cm$ einsetzen: $2 \cdot 10cm + 12cm = 32cm < 42cm$
$x = 15cm$ einsetzen: $2 \cdot 15cm + 12cm = 42cm$ ⇨ $x = 15cm$ ist eine Lösung der Gleichung

M7 Äquivalenzumformungen | 12

Als **Äquivalenzumformung** bezeichnet man jede Umformung einer Gleichung, bei der sich die Lösungen der Gleichung nicht verändern.

Diese sind:

1) Addition/ Subtraktion einer Zahl oder eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung.

2) Multiplikation der beiden Seiten mit einer Zahl oder Division beider Seiten durch eine Zahl.

Achtung:

Die Zahl, mit der eine Gleichung multipliziert oder durch die sie dividiert wird, darf niemals Null sein!

z.B. $4 = 7$ unlösbare Gleichung
Beide Seiten mit 0 multiplizieren ⇨ $4 \cdot 0 = 7 \cdot 0$ ⇨ $0 = 0$ allgemeingültige Aussage
Damit ändern sich also die Lösungen!

M7 Äquivalenzumformungen | 12

Aufgaben:
Bestimme jeweils die Lösung der Gleichung mithilfe geeigneter Äquivalenzumformungen!

a) $19(2-y) = 5y + 2(y+7)$

b) $-0{,}28 = (-0{,}1x + 3{,}2) \cdot 5$

Lösung:

a) $38 - 19y = 5y + 2y + 14$
$38 - 19y = 7y + 14 \quad |-7y$
$38 - 26y = 14 \quad |-38$
$-26y = -24 \quad |:(-26)$
$y = \frac{-24}{-26} = \frac{12}{13}$

b) $-0{,}28 = -0{,}5x + 16 \quad |-16$
$-16{,}28 = -0{,}5x \quad |:(-0{,}5)$
$32{,}56 = x$
$x = 32{,}56$

M7 Lösen von Gleichungen | 13

Eine (lineare) Gleichung mit der Variablen x löst man in drei Schritten:

1. Beide Seiten vollständig vereinfachen (d.h. Klammern auflösen und zusammenfassen)
2. Alle Zahlen auf die eine Seite, alle Terme mit der Variablen auf die anderen Seite bringen
3. Durch den Vorfaktor der Variablen x dividieren.

Beispiel:

Löse folgende Gleichung: $4-2(x+3)=x-5+6x$

$4-2x-6=7x-5$

$-2-2x=7x-5 \quad |-7x$

$-2-9x=-5 \quad |+2$

$-9x=-3 \quad |:(-3)$

$x=\frac{1}{3}$

M7 Lösen von Gleichungen | 13

Löse die folgenden Gleichungen!

a) $5(3x-3)-3x=6-4(-5+3x)$

b) $3-4\left(x-\frac{3}{2}\right)=1-4x$

c) $3x-27=-9(3-\frac{1}{3}x)$

Lösung:

a) $15x-15-3x=6+20-12x$

$12x-15=26-12x \quad |+12x$

$24x-15=26 \quad |+15$

$24x=41 \quad |:24$

$x=\frac{41}{24}=1\frac{17}{24}$

b) $3-4x+6=1-4x$

$9-4x=1-4x \quad |+4x$

$9=1$ => diese Gleichung ist nicht lösbar, d.h. es gibt keine Lösung.

c) $3x-27=-27+3x \quad |+27$

$3x=3x$ => jede beliebige Zahl ist Lösung dieser Gleichung, denn beide Seiten haben den gleichen Wert, egal, was man für x einsetzt.

M7 Prozentrechnung | 14

Grundgleichung der Prozentrechnung: Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Die Grundgleichung ist eine lineare Gleichung, die nach jeder Größe aufgelöst werden kann.

M7 Grundgleichung der Prozentrechnung | 14

Berechne jeweils die fehlende Größe:

a) 14% von 300kg
b) 4cm von 3m
c) von welcher Zeit sind 80% genau 1h?

Lösung:

a) geg.: $PS=14\%,\ GW=300kg$ ges.: $PW=x$

$x=0{,}14\cdot 300kg=\frac{14}{100}\cdot 300kg=42kg$

b) geg.: $PW=4cm,\ GW=3m$ ges.: $PS=x$

$x\cdot 4cm=3m \quad |:4cm$

$x=\frac{4cm}{3m}=\frac{4cm}{300cm}\approx 1{,}3\%$

c) geg.: $PS=80\%,\ PW=1h$ ges.: $GW=x$

$0{,}8\cdot x=1h \quad |:0{,}8$

$x=\frac{1h}{0{,}8}=\frac{60min}{\frac{8}{10}}=60min\cdot\frac{10}{8}=75min$

M7 Kongruenz

15

Zwei deckungsgleiche Figuren F und G nennt man **zueinander kongruent**.

Man schreibt: $F \cong G$

Zueinander kongruente Figuren stimmen in Form und Größe überein, d.h. einander entsprechende Stücke, wie z.B. Seiten und Winkel sind gleich groß.

Kongruenzsätze für Dreiecke:
Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie

- in allen drei Seiten übereinstimmen (**SSS- Satz**)
- in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW- Satz**)
- in zwei Seiten und deren eingeschlossenem Winkel übereinstimmen (**SWS- Satz**)
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW- Satz**)

Sind von einem Dreieck diese Größen gegeben, so lässt es sich eindeutig konstruieren.

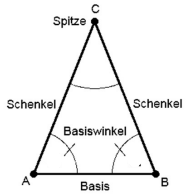
M7 Kongruenz

15

M7 Das gleichschenklige Dreieck

16

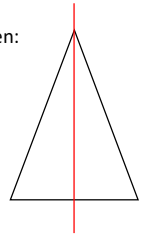
Begriffe:
Ein Dreieck mit zwei gleichlangen Seiten heißt **gleichschenkliges Dreieck**.



Satz vom gleichschenkligen Dreieck:

Trifft für ein Dreieck eine der folgenden Aussagen zu, so gelten auch die beiden anderen:

(1) Das Dreieck ist gleichschenklig.
(2) Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
(3) Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel (Basiswinkel).



M7 Das gleichschenklige Dreieck

16

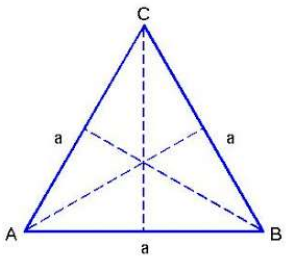
M7 Das gleichseitige Dreieck

17

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges Dreieck**.

Ein gleichseitiges Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen.

In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß und jeder beträgt wegen der Winkelsumme im Dreieck 180° : 3 = 60°



M7 Das gleichseitige Dreieck

17

M7 Satz und Kehrsatz

18

Eine wahre Aussage bezeichnet man in der Mathematik auch als **Satz**.
Sätze können in die „Wenn-dann-Form“ gebracht werden, der „Wenn-Teil“ heißt Voraussetzung, der „Dann-Teil“ Behauptung.
Vertauscht man Behauptung und Voraussetzung eines Satzes, so entsteht der Kehrsatz, dieser kann wahr oder falsch sein.
Sind Satz und Kehrsatz wahr, so können die beiden durch die kurze Formulierung „genau dann, wenn“ zusammengefasst werden.

Um eine mathematische Aussage zu wiederlegen, reicht es, ein **Gegenbeispiel** anzugeben; will man einen Satz beweisen, so muss dies allgemein erfolgen.

Beispiel:

Satz: *„Wenn ein Dreieck zwei gleich große Winkel hat, dann ist es gleichschenklig!“*
Kehrsatz: *„Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann hat es zwei gleich große Winkel!“*

Nachdem Satz und Kehrsatz wahr sind, gilt:
„Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei gleich große Winkel hat!“

M7 Satz und Kehrsatz

18

Beispiele:

1) „Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist achsensymmetrisch.“
   a) Bringe den folgenden Satz in die „Wenn-Dann-Form“ und begründe ihn!
   b) Formuliere den Kehrsatz in „Wenn-Dann-Form“ und untersuche, ob er wahr oder falsch ist!

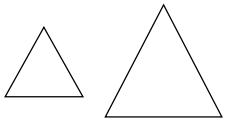
2) „Zwei Dreiecke, die in drei Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.“
   Formuliere diese Aussage in der „Wenn-Dann-Form“ und widerlege dies durch ein Gegenbeispiel!

Lösung:

1a) Wenn ein Viereck vier gleich lange Seiten hat, dann ist es achsensymmetrisch.
Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist eine Raute und eine Raute ist achsensymmetrisch. Deshalb ist die Aussage ein Satz.

1b) Kehrsatz: Wenn ein Viereck achsensymmetrisch ist, dann hat es vier gleich lange Seiten.
Diese Aussage ist falsch, da z.B. ein Rechteck auch achsensymmetrisch ist.

2) Wenn zwei Dreiecke in drei Winkeln übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
Gegenbeispiel:

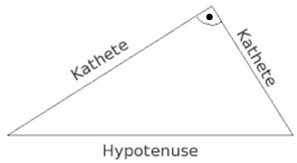


Die beiden Dreiecke haben dieselben Innenwinkel, stimmen jedoch in der Größe nicht überein und sind somit nicht kongruent.

M7 Das rechtwinklige Dreieck – der Satz des Thales

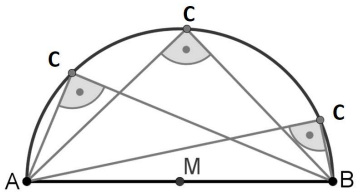
Begriffe:

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**.



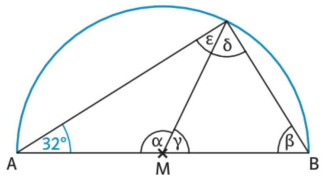
Satz des Thales:

Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ liegt.



M7 Das rechtwinklige Dreieck – der Satz des Thales

Aufgabe:
Berechne die Größen der in der Abbildung rechts eingezeichneten Winkel und begründe deine einzelnen Schritte stichpunktartig!

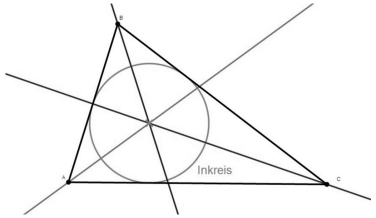


Lösung:
$\varepsilon = 32°$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
$\alpha = 180° - 2 \cdot 32° = 116°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\delta = 90° - \varepsilon = 58°$ (rechter Winkel im Thaleskreis)
$\beta = 58°$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
$\gamma = 180° - \alpha = 64°$ (Nebenwinkel)

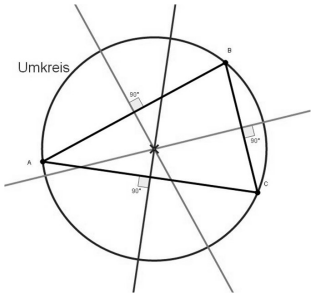
M7 In- und Umkreis eines Dreiecks

In jedem Dreieck schneiden sich die **Mittelsenkrechten** der drei Dreiecksseiten in einem Punkt U. Dieser Punkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks jeweils den gleichen Abstand, er ist damit der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem die Eckpunkte des Dreiecks liegen. Diesen Kreis nennt man **Umkreis**.

In jedem Dreieck schneiden sich die **Winkelhalbierenden** der drei Innenwinkel in einem Punkt I. Dieser Punkt hat von den drei Seiten jeweils den gleichen Abstand, er ist folglich der Mittelpunkt des Kreises, der alle Seiten berührt. Diesen Kreis nennt man **Inkreis.**



Winkelhalbierende



Mittelsenkrechte

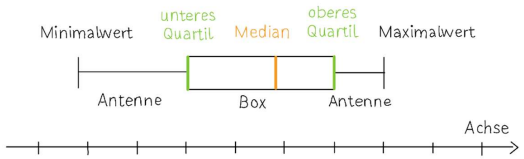
M7 In- und Umkreis eines Dreiecks

Der **Median** eines Datensatzes ist bei ungerader Anzahl von Daten der mittlere Wert des geordneten Datensatzes, bei gerader Anzahl das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte.

Die **Spannweite** eines Datensatzes ist die Differenz aus dem größten und dem kleinsten Wert.

Der Median zerlegt einen geordneten Datensatz in einen unteren und einen oberen Block. Das **untere Quartil** ist der Median des unteren Blockes, das **obere Quartil** der Median des oberen Blockes. Der Median selbst gehört dabei zu keinem der beiden Blöcke.

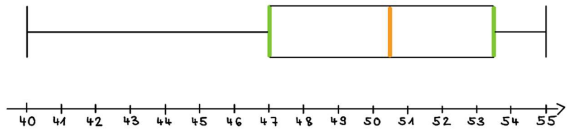
Ein **Boxplot** besteht aus einem Rechteck (der sogenannten Box) und zwei Antennen. Das Rechteck wird vom unteren und oberen Quartil begrenzt, der Median liegt im Rechteck. Die Antennen werden durch das Minimum und Maximum der Werte festgelegt. Mithilfe eines Boxplots kann man die Kenngrößen eines Datensatzes graphisch darstellen.



M7 Kenngrößen von Daten 21

Aufgabe:
In einer Zeitung sind die Geburtsgrößen der Neugeborenen eines Heiligen Abends aufgelistet:
$48cm, 46cm, 51cm, 50cm, 52cm, 53cm, 40cm, 41cm, 55cm, 55cm, 50cm, 54cm$
Erstelle zu diesen Angaben einen Boxplot!

Lösung:
Zunächst erstellt man einen geordneten Datensatz:

$$\underbrace{40cm, 41cm, 46cm, 48cm, 50cm, 50cm}_{\text{unterer Block}}, \underbrace{51cm, 52cm, 53cm, 54cm, 55cm, 55cm}_{\text{oberer Block}}$$

Es gibt 12 Werte, also ist der Median das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte, diese sind $50cm$ und $51cm$. Der Median beträgt also $50{,}5cm$.
Das untere Quartil ist der Mittelwert von $46cm$ und $48cm$, also $47cm$.
Das obere Quartil ist der Mittelwert von $53cm$ und $54cm$, also $53{,}5cm$.